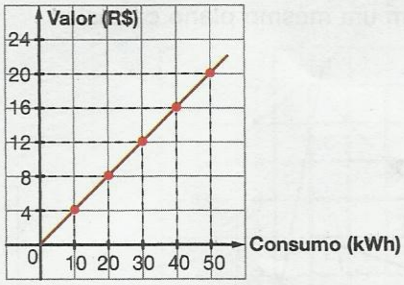
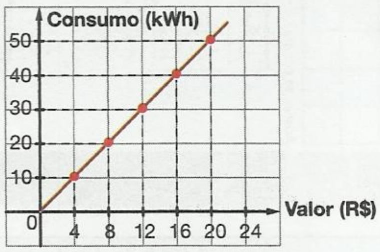
Função inversa

Para calcular o valor de uma fatura residencial, a concessionária de energia elétrica de certa região multiplica o consumo em quilowatt-hora (kWh) por 0,4, obtendo o valor em real. Se o consumo mensal for de 267 kWh, por exemplo, o valor da fatura será R$ 106,80, pois $267 \cdot 0{,}4 = 106{,}8$.

A função $f(x) = 0{,}4x$ associa o consumo em quilowatt-hora ao valor em reais da fatura. Observe o gráfico de *f*.



Podemos também escrever uma função *g*, com objetivo contrário ao de *f*, ou seja, associando o valor da fatura ao consumo mensal. Nesse caso, $g(x) = 2{,}5x$.

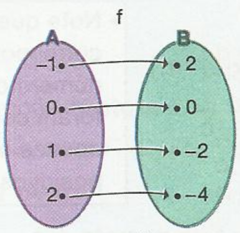


Note que para todo $a \in D(f)$, se $f(a) = b$, então $g(b) = a$. Por exemplo, $f(20) = 8$ e $g(8) = 20$. Dizemos que *g* é a função inversa de *f*.

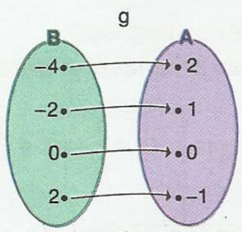
Observe outro exemplo.

Dada a função *f* de *A* em *B* definida por $f(x) = -2x$ e a função *g* de *B* em *A* definida por $g(x) = -\frac{x}{2}$, com $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2\}$, podemos representá-las pelos seguintes diagramas:

- $f(-1) = 2$
- $f(0) = 0$
- $f(1) = -2$
- $f(2) = -4$



- $g(-4) = 2$
- $g(-2) = 1$
- $g(0) = 0$
- $g(2) = -1$

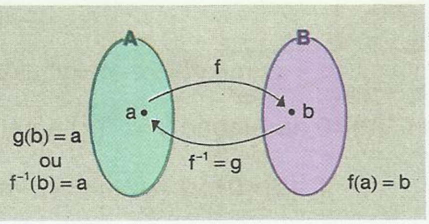


Note que:

- as funções *f* e *g* são bijetoras
- $D(f) = Im(g)$ e $D(g) = Im(f)$
- se $(x, y) \in f$, então $(y, x) \in g$

Nessas condições, dizemos que *g* é a função **inversa** de *f*.

Dada uma função bijetora *f* de *A* em *B*, dizemos que uma função *g* de *B* em *A* é inversa de *f* se, para todo $a \in A$ e $b \in B$ tal que $f(a) = b$, tem-se $g(b) = a$. Em geral, indicamos a função inversa de *f* por f^{-1}, ou seja, $f^{-1} = g$.



Ilustrações: Acervo da editora

Procel

O Programa Nacional de Conservação de Energia Elétrica (Procel), criado em 1985 pelo Governo Federal, tem como principais objetivos diminuir o desperdício de energia elétrica e buscar a eficiência no seu consumo. Instituído em 1993, o Selo Procel de Economia de Energia indica ao consumidor quais os produtos que possuem maior eficiência energética, sendo classificados em cinco categorias: *A*, *B*, *C*, *D* e *E*. A categoria *A* indica os produtos com maior eficiência de consumo energético, e a categoria *E*, os de menor eficiência. Mais informações no *site* www.procel.gov.br.

Marinez Maravalhas Gomes

Selo Procel em um refrigerador.

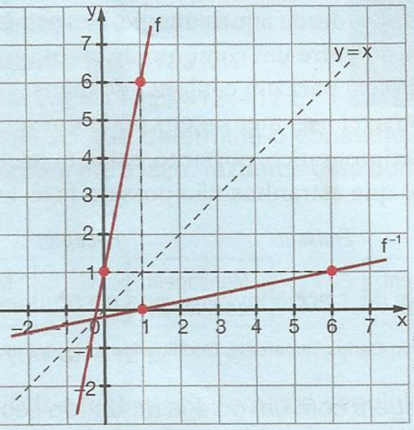
R9 Dada a função $f(x)=5x+1$, construa os gráficos de f e f^{-1} no mesmo plano cartesiano.

Resolução

Determinamos f^{-1} trocando x por $y=f(x)$ e $y=f(x)$ por x e, em seguida, isolando y:

$$x=5y+1 \Rightarrow 5y=x-1 \Rightarrow y=\frac{x-1}{5} \Rightarrow y=\frac{x}{5}-\frac{1}{5}$$

Construindo os gráficos de $f(x)=5x+1$ e $f^{-1}(x)=\frac{x}{5}-\frac{1}{5}$ em um mesmo plano cartesiano, temos:



Acervo da editora

ATIVIDADES

Anote as respostas no caderno

43 Determine a inversa de cada função bijetora.

a) $f(x)=-4x+1$

b) $f(x)=\sqrt[5]{x+3}$

c) $f(x)=\frac{x}{2}-5$

d) $f(x)=\frac{2}{x-1}$, com $x\neq 1$

e) $f(x)=3x^2+4$, com $x\geq 0$

f) $f(x)=\frac{6x-1}{3x+2}$, com $x\neq -\frac{2}{3}$

44 Dada a função $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$, com $x\neq 3$, determine:

a) $f^{-1}(x)$

b) $D(f^{-1})$

c) $Im(f^{-1})$

d) $f^{-1}(-4)$

45 Seja a função bijetora f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x)=mx+3$, com $f^{-1}(2)=5$. Calcule:

a) o valor de m

b) $f(2)$

c) $f(0)$

d) $f^{-1}(-2)$

e) $f^{-1}(4)$

46 Represente, em um mesmo plano cartesiano, cada função e sua inversa.

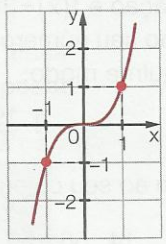
a) $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=3x-8$

b) $g:\mathbb{R}_+\rightarrow[-1,+\infty[$ definida por $g(x)=2x^2-1$

c) $h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $h(x)=x^3$

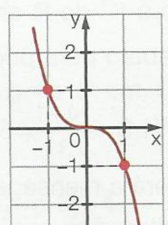
47 Sendo f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ uma função definida por $f(x)=3x-2$, determine as coordenadas do ponto de interseção dos gráficos de f e f^{-1}.

48 Observe o gráfico da função g^{-1}.

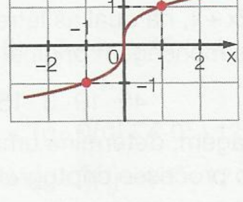


Qual gráfico representa a função g?

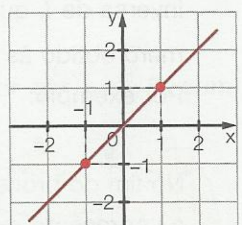
a)



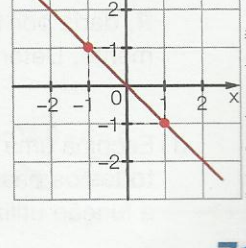
b)



c)



d)



Ilustrações: Acervo da editora

Resolução das questões 43, 44, 45, 46 e 47

43 a) $f(x) = -4x+1$, fazemos $f(x) = y$ e depois trocamos x por y e por final isolamos o y.

$$y = -4x+1$$
$$x = -4y+1$$
$$+4y = 1-x$$
$$y = \frac{1-x}{4}$$, logo $f(x) = -4x+1$ e
$$f^{-1}(x) = \frac{1-x}{4}$$

---

b) $f(x) = \sqrt[5]{x+3}$

$$y = \sqrt[5]{x+3}$$
$$x = \sqrt[5]{y+3}$$
$$(x)^5 = \left(\sqrt[5]{y+3}\right)^5$$
$$x^5 = y+3$$
$$y+3 = x^5$$
$$y = x^5-3$$

logo $f(x) = \sqrt[5]{x+3}$ e $f^{-1}(x) = x^5-3$

c) $f(x) = \frac{x}{2} - 5$

$y = \frac{x}{2} - 5$

$x = \frac{y}{2} - 5$

$\frac{y}{2} - 5 = x$

$\frac{y}{2} = x + 5$

$y = 2x + 10$, logo

$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{2} - 5 \text{ e} \\ f^{-1}(x) = 2x + 10 \end{cases}$

d) $f(x) = \frac{2}{x-1}$

$y = \frac{2}{x-1}$

$x = \frac{2}{y-1}$

$x(y-1) = 2$

$yx - x = 2$

$yx = 2 + x$

$y = \frac{2+x}{x}$

logo

$\begin{cases} f(x) = \frac{2}{x-1} \text{ e} \\ f^{-1}(x) = \frac{2+x}{x} \end{cases}$

---

e) $f(x) = 3x^2 + 4$, com $x \geq 0$

$y = 3x^2 + 4$

$x = 3y^2 + 4$

$3y^2 + 4 = x$

$3y^2 = x - 4$

$y^2 = \frac{x-4}{3}$

$y = \sqrt{\frac{x-4}{3}}$, com $x \geq 4$

logo $f(x) = 3x^2 + 4$

$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-4}{3}}$, com $x \geq 4$.

$f(x) = \frac{6x-1}{3x+2}$, com $x \neq -\frac{2}{3}$

$y = \frac{6x-1}{3x+2}$

$x = \frac{6y-1}{3y+2}$

$x(3y+2) = 6y - 1$

$3yx + 2x = 6y - 1$

$3yx - 6y = -1 - 2x$

$y(3x - 6) = -(1 + 2x)$

$y = \frac{-(1+2x)}{(3x-6)}$

$y = \frac{2x+1}{6-3x}$, com $x \neq 2$

$\begin{cases} f(x) = \frac{6x-1}{3x+2}, \text{ com } x \neq -\frac{2}{3} \\ f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{6-3x}, \text{ com } x \neq 2 \end{cases}$

(44) Dado a função $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$, com $x \neq 3$, determine:

a) $f^{-1}(x)$

$f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

$y = \frac{2x+1}{x-3}$

$x = \frac{2y+1}{y-3}$

$x(y-3) = 2y+1$

$yx - 3x = 2y+1$

$yx - 2y = 1+3x$

$y(x-2) = 1+3x$

$y = \frac{1+3x}{(x-2)}$, logo

$f^{-1}(x) = \frac{1+3x}{x-2}$, com $x \neq 2$

b) $D(f^{-1})$, sendo $f^{-1}(x) = \frac{1+3x}{x-2}$, temos o domínio da função é $x \neq 2$

c) $Im(f^{-1})$, como a imagem de $f^{-1}(x)$ é igual a $f(x)$, e $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$, logo $Im(f^{-1}(x))$ é $x \neq 3$

d) $f^{-1}(-4)$

$f^{-1}(x) = \frac{1+3x}{x-2}$

$f^{-1}(-4) = \frac{1+3(-4)}{(-4)-2}$

$f^{-1}(-4) = \frac{1-12}{-4-2}$

$f^{-1}(-4) = \frac{-11}{-6}$

$f^{-1}(-4) = \frac{11}{6}$

(45) Seja a função bijetora f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = mx+3$, com $f^{-1}(2)=5$. Calcule:

a) O valor de m. então primeiro encontramos f^{-1} e depois m

$f(x)=mx+3$

$y=mx+3$

$x=my+3$

$+my+3=x$

$my=x-3$

$y=\frac{x-3}{m}$

$f^{-1}(x)=\frac{x-3}{m}$

$f^{-1}(x)=\frac{x-3}{m}$ e $f^{-1}(2)=5$

$f^{-1}(2)=\frac{2-3}{m}$

$5=\frac{2-3}{m}$

$5m=-1$

$\boxed{m=-\frac{1}{5}}$

b) $f(2)=?$

Como $f(x)=mx+3$, substituindo m temos $f(x)=-\frac{1}{5}x+3$, logo $f(2)$ é:

$f(2)=-\frac{1}{5}\cdot 2+3$

$f(2)=-\frac{2}{5}+3$

$f(2)=\frac{-2+15}{5}$

$f(2)=\frac{13}{5}$

c) $f(0)=?$

$f(x)=-\frac{1}{5}\cdot x+3$

$f(0)=-\frac{1}{5}\cdot 0+3$

$f(0)=\frac{0}{5}+3$

$f(0)=0+3$

$f(0)=3$

d) $f^{-1}(x)=\frac{x-3}{m}$

$f^{-1}(-2)=\frac{-2-3}{-\frac{1}{5}}$

$f^{-1}(-2)=\frac{-5}{-\frac{1}{5}}$

$f^{-1}(-2)=-5\cdot\left(-\frac{5}{1}\right)$

$f^{-1}(-2)=25$

(46) Represente, em um mesmo plano cartesiano, cada função inversa.

a) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x - 8$

Vamos usar dois pontos para $x = 1$ e para $x = 2$

$f^{-1}(x) = ?$

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+8}{3}$

$f(x) = 3x - 8$, fazendo $f(x) = y$

$y = 3x - 8$

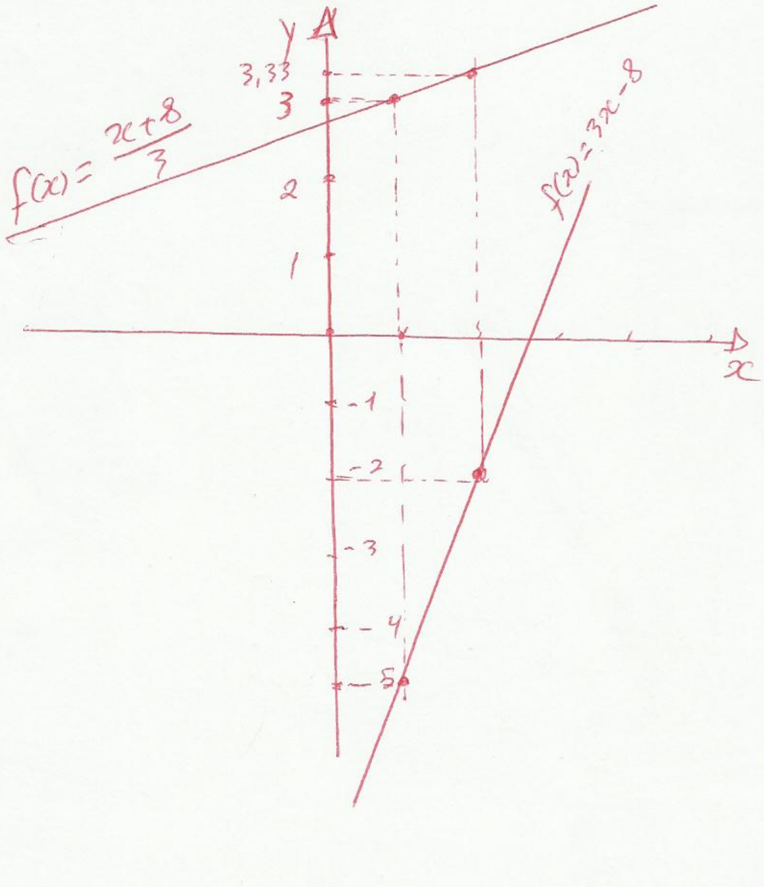
$x = 3y - 8$

$3y - 8 = x$

$y = \dfrac{x+8}{3}$, logo $f^{-1}(x) = \dfrac{x+8}{3}$

x	$f(x) = 3x - 8$	
1	$f(1) = 3 \cdot 1 - 8 = 3 - 8 = -5$	$(1, -5)$
2	$f(2) = 3 \cdot 2 - 8 = 6 - 8 = -2$	$(2, -2)$

x	$f^{-1}(x) = \dfrac{x+8}{3}$
1	$f^{-1}(1) = \dfrac{1+8}{3} = \dfrac{9}{3} = 3$
2	$f^{-1}(2) = \dfrac{2+8}{3} = \dfrac{10}{3} = 3{,}33...$



$g: \mathbb{R} \to [-1, +\infty[$ definida por $g(x) = 2x^2 - 1$ e

$g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$

$y = 2x^2 - 1$

$x = 2y^2 - 1$

$2y^2 - 1 = x$

$2y^2 = x + 1$

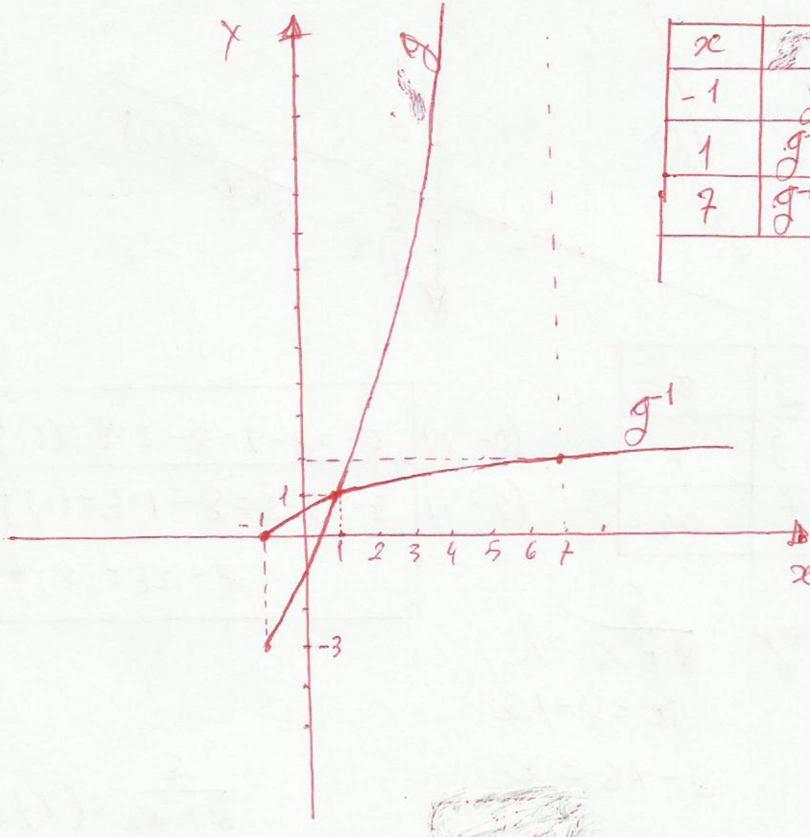
$y^2 = \frac{x+1}{2}$

$y = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$, com $x \geq -1$

Vamos usar $x = 1$, $x = 7$ e $x = -1$

x	$g(x) = 2x^2 - 1$
1	$g(1) = 2(1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1$
7	$g(7) = 2 \cdot (7)^2 - 1 = 98 - 1 = 97$
-1	$g(-1) = 2(-1) - 1 = -3$

x	$g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$
-1	$g^{-1}(-1) = \sqrt{\frac{-1+1}{2}} = \sqrt{\frac{0}{2}} = \sqrt{0} = 0$
1	$g^{-1}(1) = \sqrt{\frac{1+1}{2}} = \sqrt{1} = 1$
7	$g^{-1}(7) = \sqrt{\frac{7+1}{2}} = \sqrt{4} = 2$



47 Sendo f de IR em IR uma função definido por $f(x)=3x-2$, determine as coordenadas do ponto de interseção dos graficos f e f^{-1}

para saber o ponto de interseção vamos encontra primeiramente o valor de x fazendo $f(x)=f^{-1}(x)$ e

$f^{-1}(x)$ é $y=3x-2$

$x=3y-2$

$3y=x+2$

$y=\frac{x+2}{3}$

então $f^{-1}(x)=\frac{x+2}{3}$

$f(x)=f^{-1}(x)$

$3x-2=\frac{x+2}{3}$

$3(3x-2)=x+2$

$9x-6=x+2$

$9x-x=2+6$

$8x=8$

$x=\frac{8}{8}$

$\boxed{x=1}$

então quando a abscissa for 1 o $f(x)=f^{-1}(x)$

logo as coordenadas do ponto de interseção são: $x=1$ e $y=f(x)=3(1)-2=3-2=1$; $(1,1)$